

А. В. ЕФИМОВ, Ю. В. РОМАШОВ, Т. А. ЕСИПЕНКО, Д. А. ЧИБИСОВ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ КЕРАМИЧЕСКОГО ЯДЕРНОГО ТОПЛИВА

Рассматриваются численные методы решения задач теплопроводности: классический метод сеток и метод полудискретизации с сеточной дискретизацией в пространственной области исследования температурного состояния керамического ядерного топлива. Показано, что применение метода полудискретизации, приводящего к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями относительно узловых значений искомых величин, имеет ряд преимуществ перед классическим методом сеток из-за более широких возможностей выбора схемы интегрирования по времени.

Ключевые слова: ядерное топливо, нестационарная теплопроводность, переходный процесс, длительность переходного процесса, численное приближенное решение, метод сеток, метод полудискретизации, численное интегрирование, шаг интегрирования, погрешность приближенных решений.

О. В. ЄФІМОВ, Ю. В. РОМАШОВ, Т. О. ЕСИПЕНКО, Д. О. ЧІБІСОВ

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО СТАНУ КЕРАМІЧНОГО ЯДЕРНОГО ПАЛИВА

Розглядаються чисельні методи розв'язання задач теплопровідності: класичний метод сіток і метод напівдискретизації з сітковою дискретизацією в просторовій області дослідження температурного стану керамічного ядерного палива. Показано, що застосування методу напівдискретизації, що приводить до системи звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами щодо вузлових значень шуканих величин, має ряд переваг перед класичним методом сіток через більш широкі можливості вибору схеми інтегрування за часом.

Ключові слова: ядерне паливо, нестационарна теплопровідність, перехідний процес, тривалість перехідного процесу, чисельне наближене рішення, метод сіток, метод напівдискретизації, чисельне інтегрування, крок інтегрування, похибка наближених рішень.

A. YEFIMOV, YU. ROMASHOV, T. YESYPENKO, D. CHIBISOV

NUMERICAL METHODS USED FOR THE SOLUTION OF HEAT CONDUCTIVITY PROBLEMS TO STUDY THE TEMPERATURE STATE OF CERAMIC NUCLEAR FUEL

The purpose of this research was to study the opportunities of numerical methods used for the solution of heat conductivity problems to study the temperature state of ceramic nuclear fuel the specific feature of which is its low heat conductivity. Therefore, this scientific paper gives consideration to the two options of the grid method used to solve the problem of nonstationary heat conductivity of the rod made of uranium dioxide and the solutions were compared to what was obtained using the method of separation of variables by an accurate analytical solution. The computation data show that a classic option of the grid method allows for the derivation of sufficiently accurate solutions, though the application of it requires a priori substantiation of the choice of the pitch relation for time and 3D grids; in general it is a very complicated mathematical problem. The computations showed that it is convenient to use the method of semi-descretization for the solution of heat conductivity problems to study the temperature state of ceramic nuclear fuel. This method allows us to derive ordinary differential equations with initial conditions for node temperature values on the 3D grid that can be solved using highly-efficient numerical methods of stepwise integration with the self-selection of the pitch. The investigation data show that it is advisable to use the method of semi-descretization with 3D grids and numerical time integration using the Merson method to solve heat conductivity problems when studying the temperature state of ceramic nuclear fuel in the future.

Key words: nuclear fuel, nonstationary heat conductivity, transient process, transient process duration, numerical approximation solution, grid method, method of semi-descretization, numerical integration, and the error of approximated solutions.

Введение

Закономерности температурного состояния керамического ядерного топлива представляют большой интерес для разработки новых и совершенствования известных разновидностей такого топлива для более эффективного использования в ядерных энергетических установках [1–5]. Такие закономерности обычно устанавливаются на основе решений соответствующим образом сформулированных задач теплопроводности. Поскольку возможности точных аналитических методов ограничены, а более достоверное описание процессов приводит к усложнению математических формулировок, решение задач теплопроводности для оценки температурного состояния керамиче-

ского ядерного топлива требует более совершенных численных методов. Поэтому данные научные исследования, в которых рассматриваются возможности численных сеточных методов решения задач теплопроводности для изучения температурного состояния керамического ядерного топлива, являются актуальными и представляют значительный интерес для атомной энергетики и энергетического машиностроения.

Цель работы

Характерной особенностью керамического ядерного топлива является его низкая теплопроводность, которая может приводить к большей длительности переходных процессов при измене-

© О. В. Ефимов, Ю. В. Ромашов, Т. А. Есипенко, Д. А. Чибисов, 2018

ниях установившегося поля температуры. При исследовании таких процессов требуется интегрирование соответствующего уравнения теплопроводности на отрезке времени, который может оказаться намного больше шага интегрирования по времени, необходимого для получения приближенного решения приемлемой точности. Целью данного исследования является поиск возможности совершенствования характеристик керамического ядерного топлива путем изучения его температурного состояния с помощью численных методов, а именно: классического метода сеток с постоянным шагом интегрирования по времени и метода полудискретизации, в котором имеется только пространственная сетка.

Математическая формулировка задачи

Для изучения возможностей различных вариантов метода сеток выполним решение задачи нестационарной теплопроводности для стержня длиной l , изготовленного из диоксида урана, которая формулируется следующим образом [6]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad a = \text{const}, \quad 0 < x < l, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad T_0 = \text{const}, \quad 0 < x \leq l, \quad (2)$$

$$T(0, t) = T^{(0)}, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) = 0, \quad T^{(0)} = \text{const}, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где x – координата вдоль оси стержня;

t – время;

$T(x, t)$ – поле температуры;

a – коэффициент температуропроводности материала стержня;

T_0 – температура стержня в момент времени $t = 0$;

$T^{(0)}$ – температура на краю $x = 0$ стержня.

Выбор математической модели процесса теплопроводности керамического ядерного топлива в виде (1)–(3) связан с тем, что для исследуемой задачи можно при помощи метода разделения переменных [6] получить точное аналитическое решение, которое имеет следующий вид:

$$T(x, t) = T^{(0)} + 2(T_0 - T^{(0)}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\varphi_k x/l)}{\varphi_k} e^{-\varphi_k^2 \frac{a}{l^2} t}, \quad (4)$$

где $\varphi_k = (2k - 1)\pi/2$.

Сравнение численных приближенных решений с точным аналитическим решением (4), позволит сопоставить результаты решения задачи нестационарной теплопроводности, полученные с помощью соответствующих вариантов численных методов и сделать заключение об их возможностях для исследования процессов теплопроводности в керамическом ядерном топливе. В качестве исходных данных для выполнения расчетов используем следующие значения:

$$l = 2,6 \text{ мм}, \quad a = 1,374 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$T_0 = 873 \text{ К}, \quad T^{(0)} = 893 \text{ К}. \quad (5)$$

Числовые значения параметров, указанные в (5), отвечают типичным условиям эксплуатации наиболее распространенного в настоящее время керамического ядерного топлива – диоксида урана в реакторах с водой под давлением.

Метод сеток и метод полудискретизации

Применительно к решению задачи теплопроводности вида (1)–(3) метод сеток подразумевает определение в узлах $x = x_j, j = 1, 2, \dots, n$, где n – число узлов, пространственной сетки в моменты времени $t = t_i, i = 1, 2, \dots$ узловых значений температуры $T_j^i = T(x_j, t_i)$. Узлы пространственной сетки x_j располагаются с шагом $\Delta x = l/(n - 1)$, а моменты времени t_i – с некоторым шагом Δt , так что

$$\left. \begin{aligned} x_j &= (j-1)\Delta x, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ t_i &= (i-1)\Delta t, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда, с учетом начального условия (2) и граничного условия (3) сразу имеем возможность получить некоторые из искомым узловых значений температуры:

$$\left. \begin{aligned} T_1^i &= T^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, \\ T_j^1 &= T_0, \quad j = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Остальные искомые узловые значения температуры определим при помощи метода сеток, как описано в работе [7], что приведет к следующему алгоритму:

$$\left. \begin{aligned} T_j^{i+1} &= T_j^i + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (T_{j-1}^i - 2T_j^i + T_{j+1}^i), \\ j &= 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$T_j^{i+1} = \frac{4}{3} T_{j-1}^{i+1} - \frac{1}{3} T_{j-2}^{i+1}, \quad j = n \quad (9)$$

Шаг Δt следует выбирать в соответствии с известным для уравнения (1) соотношением [7] следующего вида:

$$\Delta t \approx \Delta x^2 / (6a). \quad (10)$$

Для исходных данных, принятых в виде (5), соотношение (10) приводит к значению $\Delta t \approx 0,0328$ с при числе узлов $n = 6$.

Применительно к рассматриваемой задаче теплопроводности вида (1)–(3) метод полудискретизации сводится к определению функций времени для узловых значений температуры $T_j(t) = T(x_j, t), j = 1, 2, \dots, n$ в узлах пространственной сетки путем интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{a}{\Delta x^2} (T^{(0)} - 2T_2 + T_3), \quad T_2(0) = T_0. \quad (11)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = \frac{a}{\Delta x^2} (T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1}),$$

$$T_j(0) = T_0, \quad j = 2, 3, \dots, n-2. \quad (12)$$

$$\frac{dT_{n-1}}{dt} = \frac{a}{\Delta x^2} \left(\frac{2}{3} T_{n-2} - \frac{1}{3} T_{n-1} \right), \quad T_{n-1}(0) = T_0. \quad (13)$$

При этом значения температуры в граничных узлах $j = 1$ и $j = n$ естественно определяются при помощи граничных условий следующим образом:

$$T_1(t) = T^{(0)}, \quad T_n(t) = \frac{4}{3} T_{n-1}(t) - \frac{1}{3} T_{n-2}(t). \quad (14)$$

Для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями (11)–(13) можно использовать различные численные методы [8]. Далее используем метод Мерсона, в котором осуществляется автоматический выбор шага интегрирования по заданной допустимой погрешности интегрирования на шаге. Этот метод хорошо показал себя при решении задач теории ползучести [9], в которых приходится учитывать резкое увеличение скорости процесса ползучести и повреждаемости в моменты, предшествующие разрушению.

Обсуждение результатов

На рис. 1 представлено сравнение результатов численных приближенных решений, полученных для задачи теплопроводности стержня из диоксида урана в точке $x = l$ методом сеток (2) при $\Delta t = 0,03$ с; $n = 6$ и методом полудискретизации (3), с точным аналитическим решением (1), полученным методом разделения переменных. Некоторое различие между значениями численных и аналитических решений на рис. 1 связано с тем, что представленные численные решения отвечают относительно небольшому числу n узлов пространственной сетки. За счет достаточно большого числа n узлов сетки можно получать численные приближенные решения задачи теплопроводности требуемой точности мало отличающиеся от точного аналитического решения (1), что подтверждено соответствующими расчетами. Однако увеличение числа n узлов пространственной сетки приводит к уменьшению шага Δx сетки и, как следствие соотношения (10) – к уменьшению шага Δt по времени в методе сеток (7)–(9). В виду малой теплопроводности диоксида урана приходится рассматривать температурные поля в течение времени, заметно большем шага Δt , получение которых будет приводить к значительным объемам вычислений и, как следствие – к накоплению вычислительных погрешностей. В то же время применение метода Мерсона для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых методом полудискретизации с начальными условиями

(11)–(13) относительно узловых значений температуры, позволяет автоматически выбирать шаг в процессе интегрирования по времени и за счет этого получать более точные решения, как показано на рис. 1.

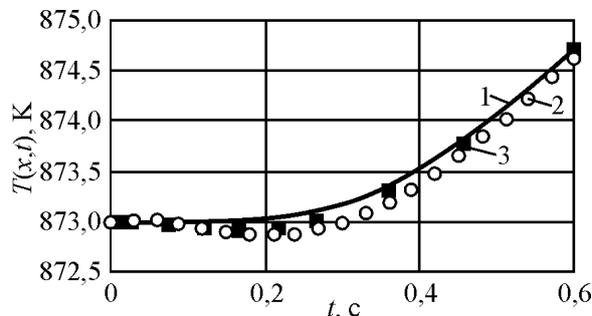


Рис. 1 – Решения задачи теплопроводности стержня из диоксида урана в точке $x = l$, полученные разными методами:

1 – аналитическое решение метода разделения переменных; 2 – решение классическим методом сеток; 3 – решение методом полу-дискретизации с интегрированием по времени методом Мерсона

Преимущества метода полудискретизации и метода Мерсона (11)–(13) проявляются более ярко при получении приближенных решений, отвечающих моментам времени $t \gg \Delta t$, что требует большого числа шагов в классическом методе сеток (7)–(9), особенно при большом числе узлов пространственной сетки, необходимом для получения решения с требуемой высокой точностью. Действительно, как показывают результаты расчетов, представленные на рис. 1, где маркеры отвечают значению температуры в точке $x = l$ на шагах интегрирования по времени, интегрирование дифференциальных уравнений (11)–(13) методом Мерсона позволяет получить более точное приближенное решение за меньшее число шагов, чем классический метод сеток.

Выводы

Исследования показали, что метод полудискретизации с пространственными сетками и интегрированием по времени с автоматическим шагом интегрирования представляет более эффективный, чем классический метод сеток, подход к решению задач теплопроводности для исследования температурного состояния в керамическом ядерном топливе. За счет автоматического выбора шага интегрирования по времени обеспечивается более высокая точность получаемых решений, а также возможность получения приближенного решения за меньшее число шагов. Эти преимущества особенно важны при исследовании температурного состояния керамического ядерного топлива, имеющего очень низкую теплопроводность. В дальнейших исследованиях температурного состо-

яння керамічного ядерного палива передбачається використовувати метод напівдискретизації з інтегруванням по часу методом Мерсона. При цьому планується розглянути більш складні математичні формулювання задачі теплопровідності керамічного ядерного палива, в яких передбачається враховувати циліндричну форму паливних таблеток, температурні залежності теплофізичних характеристик керамічного ядерного палива. Також передбачається розглянути більш складні граничні умови в задачах теплопровідності керамічного ядерного палива, враховуючі наявність газового наповнювача, розділювача палива і оболочку твэла, а також вплив на температурний стан палива процесів теплопровідності оболочкі твэла і теплообміну на її границі з рухомих теплоносієм.

Список литературы

1. Terrani, K., Balooch M., Carpenter D., Kohse G., Keiser D., Meyer M., Olander D. Irradiation effects on thermal properties of LWR hydride fuel. *Journal of Nuclear Materials*. 2017. Vol. 486. pp. 381–390.
2. Saadi, M. K., Bashiri B. Neutronic and thermal-hydraulic analysis of alternative ceramic fuels in the next-generation of light water reactors. *Progress in Nuclear Energy*. 2016. Vol. 87. pp. 89–96.
3. Liu R., Zhou W., Prudil A., Chan P. K. Multiphysics modeling of UO₂-SiC composite fuel performance with enhanced thermal and mechanical properties. *Applied Thermal Engineering*. 2016. Vol. 107. pp. 86–100.
4. Somayajulu P. S., Ghosh P. S., Arya A., Vrinda Devi K. V., Dutta B. K. Thermal expansion and thermal conductivity of (Th,Pu)O₂ mixed oxides: A molecular dynamics and experimental study. *Journal of Alloys and Compounds*. 2016. Vol. 664. pp. 291–303.
5. Yang J. H., Kim D.-J., Kim K. S., Koo Y.-H. UO₂-UN composites with enhanced uranium density and thermal conductivity, *Journal of Nuclear Materials*. 2015. Vol. 465. pp. 509–515.
6. Tritt Terry (Ed.) *Thermal conductivity: theory, properties, and applications*. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2004. 290 p.

7. Fletcher C. A. J. *Computational techniques for fluid dynamics 1 Fundamental and General Techniques*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1988, 1991. 404 p.
8. Hoffman J. D., Frankel S. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. New York-Basel: Marcel Dekker, Inc., 2001. 825 p.
9. Morachkovskii O. K., Romashov Yu. V. *Solving initial-boundary-value creep problems*. International Applied Mechanics. 2009. Vol. 45, No. 10. pp. 1061–1070.

References (transliterated)

1. Terrani, K., Balooch, M., Carpenter, D., Kohse, G., Keiser, D., Meyer, M. and Olander D. (2017), "Irradiation effects on thermal properties of LWR hydride fuel", *Journal of Nuclear Materials*, Vol. 486, pp. 381–390.
2. Saadi, M. K. and Bashiri, B. (2016), "Neutronic and thermal-hydraulic analysis of alternative ceramic fuels in the next-generation of light water reactors", *Progress in Nuclear Energy*, Vol. 87, pp. 89–96.
3. Liu, R., Zhou, W., Prudil, A. and Chan, P. K. (2016), "Multiphysics modeling of UO₂-SiC composite fuel performance with enhanced thermal and mechanical properties", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 107, pp. 86–100.
4. Somayajulu, P. S., Ghosh, P. S., Arya, A., Vrinda Devi, K. V. and Dutta, B. K. (2016), "Thermal expansion and thermal conductivity of (Th,Pu)O₂ mixed oxides: A molecular dynamics and experimental study", *Journal of Alloys and Compounds*, Vol. 664, pp. 291–303.
5. Yang, J. H., Kim, D.-J., Kim, K. S. and Koo, Y.-H. (2015), "UO₂-UN composites with enhanced uranium density and thermal conductivity", *Journal of Nuclear Materials*, Vol. 465, pp. 509–515.
6. Tritt T. (ed.) (2004), *Thermal conductivity: theory, properties, and applications*, Kluwer Academic New York.
7. Fletcher, C. A. J. (1988, 1991), *Computational techniques for fluid dynamics 1 Fundamental and General Techniques*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
8. Hoffman, J. D. and Frankel, S. (2001), *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Marcel Dekker Inc., New York-Basel.
9. Morachkovskii, O. K. and Romashov, Yu. V. (2011), "Prediction of the corrosion cracking of structures under the conditions of high-temperature creep", *Materials Science*, Vol. 46, No. 5, pp. 613–618.

Поступила (received) 15.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Єфімов Олександр Вячеславович (Efimov Aleksander) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри парогенераторобудування; м Харків, Україна; e-mail: avefim@kpi.kharkov.ua, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3300-7447>, Scopus: Author ID: 7202040387.

Ромашов Юрій Володимирович (Romashov Yury) – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри парогенераторобудування, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, професор кафедри прикладної математики; м Харків, Україна; e-mail: yu.v.romashov@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8376-3510>.

Єсипенко Тетяна Олексіївна (Yesypenko Tetyana) – науковий співробітник кафедри парогенераторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м Харків, Україна; e-mail: yestat@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6513-2088>.

Чибісов Дмитро Олексійович (Chibisov Dmytro) – магістр, аспірант кафедри парогенераторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м Харків, Україна.