УДК 621.165

В. П. СУББОТОВИЧ, д-р техн. наук, с.н.с.; проф. НТУ «ХПИ»;
А. Ю. ЮДИН, канд. техн. наук, с.н.с.; доц. НТУ «ХПИ»

ПОТОК БЕЗ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ ЧЕРЕЗ ВРАЩАЮЩУЮСЯ РЕШЕТКУ ТУРБОМАШИНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТОКА S_2

Рассмотрено относительное установившееся течение идеального газа через вращающуюся решетку осевой турбомашины. Поверхности тока S_2 являются скрученными произвольным образом поверхностями. Используется цилиндрическая система координат, однако вектор скорости потока однозначно определен не тремя проекциями на координатные оси, а только двумя проекциями на направления, которые однозначно задаются геометрией поверхности тока. Для расчета течения без осевой симметрии в слое переменной толщины получено точное уравнение количества движения.

Ключевые слова: вращающаяся решетка, идеальный газ, уравнение количества движения.

Введение

Разработка новых теоретических методов, которые смогут успешно решать не только прямые, но и обратные аэродинамические задачи для элементов проточных частей турбин и возможно более полно учитывать особенности организации процесса оптимального проектировании, является актуальной проблемой турбиностроения.

На сегодняшний день нахождение решения прямой задачи о 3*D*-течении в решетке турбомашины является весьма непростым процессом, и отсутствует перспектива создания в обозримом будущем метода, который позволит находить точное решение обратной задачи теории решеток. Поэтому и предлагается дальнейшее развитие *Q*3*D*-подхода, всесторонне разработанного Ч.Х. Ву [1], в котором полагается, что поток движется в слоях переменной толщины по поверхностям тока S_1 и S_2 (рис. 1). В задачах на поверхностях тока для описания течений используются уравнения Эйлера. Задача решается для каждой поверхности отдельно с учетом взаимного влияния двухмерных потоков. Сначала ищется осесимметричное решение на произвольно скрученных поверхностях S_2 в предположении, что оно дает удовлетворительные данные по осредненным параметрам потока через решетку, а потом на поверхностях вращения S_1 в слое переменной толщины определяются параметры потока в межлопаточном канале как отклонения от средних параметров. Очевидно, что для *Q*3*D*-подхода процесс поиска решения является итерационным процессом, а его сходимость зависит от рассмотрения степени взаимодействия течений на указанных поверхностях тока.

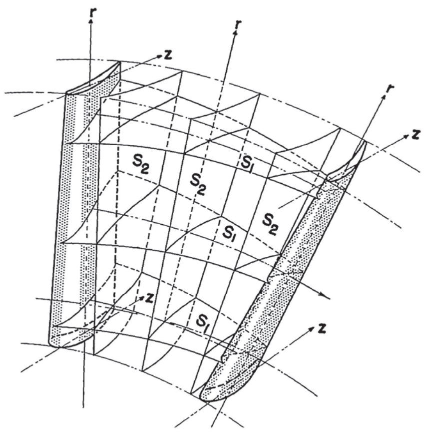

Рис. 1 – Поверхности S_1 и S_2

В методе решения обратной задачи на основе *Q*3*D*-подхода, разрабатываемом авторами [2–5], предлагается исключить итерационный процесс поиска решения и решать задачу в три этапа. На первом этапе задается геометрия двух соседних поверхностей S_2, образующих слой переменной толщины, например, в средине канала, и определяются меридиональные очертания корня и периферии межлопаточного канала для этого слоя. На втором этапе решаются обратные задачи на поверхностях S_1, таких которые могут иметь и скрученность, обусловленную вторичными течениями. На третьем этапе на основе формы межлопаточного канала выполняется объемное профилирование лопатки.

Основные определения, обозначения и зависимости

Рассматривается относительное установившееся течение идеального газа в межлопаточном канале вращающейся решетки осевой турбомашины. Используется цилиндрическая система координат (r, z, θ), ось z совпадает с осью турбомашины.

Выбран слой переменной толщины $\tau = \tau(r,\, z,\, \theta)$, ограниченный соседними поверхностями $S_2^{(i)}$ и $S_2^{(i+1)}$, и в нем – поверхность тока S_{2mid}, лежащая посредине между поверхностями $S_2^{(i)}$ и $S_2^{(i+1)}$. Течение в слое будем относить к этой поверхности.

Указана произвольная точка на поверхности S_{2mid} (рис. 2). Обозначены l_2 и m_2 проходящие через эту точку линии пересечения поверхности S_{2mid} с плоскостью $z = \text{const}$ и поверхностью $r = \text{const}$. Введены производные, следуя [1], которые берутся вдоль линии l_2 по переменной z и вдоль линии m_2 по переменной r:

$$\frac{\partial_r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{r\,\partial\theta}{\partial z} \text{ при } r = \text{const}, \quad \frac{\partial_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{r\,\partial\theta}{\partial r} \text{ при } z = \text{const} \tag{1}$$

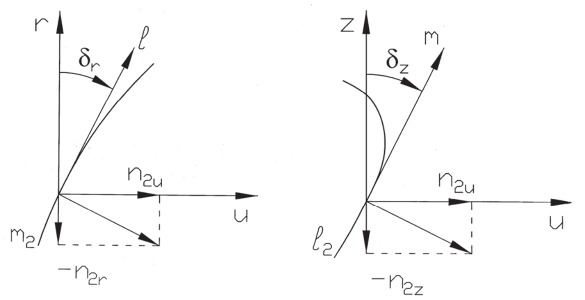

Рис. 2 – К определению направлений и углов

Заданы направления l и m, которые имеют общее начало в указанной точке и лежат на касательных к линиям l_2 и m_2. Эти направления пересекаются под углом σ_2, который однозначно определен геометрией поверхности S_{2mid}: $\cos\sigma_2 = \sin\delta_z \sin\delta_r$ [5].

Установлена связь между проекциями скорости потока W на координатные оси W_z, W_r, W_u и её проекциями W_l, W_m на направления l и m. Для этого проведена нормаль n_2 к поверхности S_{2mid}. Векторы W и n_2 – ортогональные векторы и их скалярное произведение равно нулю: $W_r\, n_{2r} + W_z\, n_{2z} + W_u\, n_{2u} = 0$. Тогда $W_u = W_r\ \operatorname{tg}\delta_r + W_z\ \operatorname{tg}\delta_z$, где $\operatorname{tg}\delta_r = \dfrac{r\,\partial\theta}{\partial r} = -\dfrac{n_{2r}}{n_{2u}}$, $\operatorname{tg}\delta_z = \dfrac{r\,\partial\theta}{\partial z} = -\dfrac{n_{2z}}{n_{2u}}$ (рис. 2), и

$$W_z = W_l \cos\delta_z\,,\ W_r = W_m \cos\delta_r\,,\ W_u = W_l\ \sin\delta_z + W_m\ \sin\delta_r\,. \tag{2}$$

Преобразование уравнения количества движения

Уравнение количества движения для трехмерного установившегося относительного движения идеального газа запишем в скалярной форме:

$$W_z\frac{\partial W_r}{\partial z} + W_r\frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{W_u}{r}\frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{W_u^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega W_u = -v\frac{\partial p}{\partial r}\,, \tag{3}$$

$$W_z\frac{\partial W_z}{\partial z} + W_r\frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{W_u}{r}\frac{\partial W_z}{\partial \theta} = -v\frac{\partial p}{\partial z}\,, \tag{4}$$

$$W_z\frac{\partial W_u}{\partial z} + W_r\frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_u}{r}\frac{\partial W_u}{\partial \theta} + \frac{W_r W_u}{r} + 2\omega W_r = -v\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\,. \tag{5}$$

Воспользуемся зависимостями, полученными из (1):

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial_r}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{r\,\partial\theta}{\partial z}=\frac{\partial_r}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{tg}\delta_z\,,\quad \frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial_z}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{r\,\partial\theta}{\partial r}=\frac{\partial_z}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{tg}\delta_r\,.$$

Выполним преобразования суммы первых трех слагаемых левой части уравнения (3), суммы всех слагаемых левой части уравнения (4) и суммы первых трех слагаемых левой части уравнения (5):

$$W_z\frac{\partial W_r}{\partial z}+W_r\frac{\partial W_r}{\partial r}+\frac{W_u}{r}\frac{\partial W_r}{\partial\theta}=$$
$$=W_z\left(\frac{\partial_r W_r}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial W_r}{\partial\theta}\operatorname{tg}\delta_z\right)+W_r\left(\frac{\partial_z W_r}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial W_r}{\partial\theta}\operatorname{tg}\delta_r\right)+\frac{W_u}{r}\frac{\partial W_r}{\partial\theta}=$$
$$=W_z\frac{\partial_r W_r}{\partial z}+W_r\frac{\partial_z W_r}{\partial r}-\left(W_r\operatorname{tg}\delta_r+W_z\operatorname{tg}\delta_z\right)\frac{1}{r}\frac{\partial W_r}{\partial\theta}+\frac{W_u}{r}\frac{\partial W_r}{\partial\theta}=W_z\frac{\partial_r W_r}{\partial z}+W_r\frac{\partial_z W_r}{\partial r}\,,$$

$$W_z\frac{\partial W_z}{\partial z}+W_r\frac{\partial W_z}{\partial r}+\frac{W_u}{r}\frac{\partial W_z}{\partial\theta}=$$
$$=W_z\left(\frac{\partial_r W_z}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial W_z}{\partial\theta}\operatorname{tg}\delta_z\right)+W_r\left(\frac{\partial_z W_z}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial W_z}{\partial\theta}\operatorname{tg}\delta_r\right)+\frac{W_u}{r}\frac{\partial W_z}{\partial\theta}=$$
$$=W_z\frac{\partial_r W_z}{\partial z}+W_r\frac{\partial_z W_z}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial W_z}{\partial\theta}\left(W_z\operatorname{tg}\delta_z+W_r\operatorname{tg}\delta_r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial W_z}{\partial\theta}W_u=W_z\frac{\partial_r W_z}{\partial z}+W_r\frac{\partial_z W_z}{\partial r}\,,$$

$$W_z\frac{\partial W_u}{\partial z}+W_r\frac{\partial W_u}{\partial r}+\frac{W_u}{r}\frac{\partial W_u}{\partial\theta}=$$
$$=W_z\left(\frac{\partial_r W_u}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial W_u}{\partial\theta}\operatorname{tg}\delta_z\right)+W_r\left(\frac{\partial_z W_u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial W_u}{\partial\theta}\operatorname{tg}\delta_r\right)+\frac{W_u}{r}\frac{\partial W_u}{\partial\theta}=$$
$$=W_z\frac{\partial_r W_u}{\partial z}+\frac{W_R}{\cos\sigma_r}W_r\frac{\partial_z W_u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial W_u}{\partial\theta}\left(W_z\operatorname{tg}\delta_z+W_r\operatorname{tg}\delta_r\right)+\frac{1}{r}W_u\frac{\partial W_u}{\partial\theta}=$$
$$=W_z\frac{\partial_r W_u}{\partial z}+W_r\frac{\partial_z W_u}{\partial r}\,.$$

Далее заменим проекции вектора скорости потока на координатные оси W_z, W_r, W_u его проекциями W_m, W_l (2), и уравнение количества движения примет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&W_l\cos\delta_z\cos\delta_r\left(\frac{\partial_r W_m}{\partial z}+\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial_z W_m}{\partial r}\right)+B_1=-v\frac{\partial p}{\partial r}\\
&W_l\cos^2\delta_z\left(\frac{\partial_r W_l}{\partial z}+\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial_z W_l}{\partial r}\right)+B_2=-v\frac{\partial p}{\partial z}\\
&W_l\cos\delta_z\sin\delta_z\left(\frac{\partial_r W_l}{\partial z}+\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial_z W_l}{\partial r}\right)+W_l\cos\delta_z\sin\delta_r\left(\frac{\partial_r W_m}{\partial z}+\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial_z W_m}{\partial r}\right)+B_3=-v\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}
\end{aligned}\right\},\qquad(6)$$

где $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{W_r}{W_z}=\dfrac{dr}{dz}=\dfrac{W_m\cos\delta_r}{W_l\cos\delta_z}$, $B_2=W_l^2\cos\delta_z\left(\dfrac{\partial_r\cos\delta_z}{\partial z}+\operatorname{tg}\gamma\dfrac{\partial_z\cos\delta_z}{\partial r}\right)$,

$$B_1=W_lW_m\cos\delta_z\left(\frac{\partial_r\cos\delta_z}{\partial z}+\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial_z\cos\delta_z}{\partial r}\right)-\frac{W_u^2}{r}-\omega^2 r-2\omega W_u\,,$$

$$B_3=W_l^2\cos\delta_z\left(\frac{\partial_r\sin\delta_z}{\partial z}+\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial_z\sin\delta_z}{\partial r}\right)+W_lW_m\cos\delta_z\left(\frac{\partial_r\sin\delta_r}{\partial z}+\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial_z\sin\delta_r}{\partial r}\right).$$

Итак, система уравнений, описывающая трехмерное установившееся течение идеального газа через подвижную решетку в слое переменной толщины на поверхности S_2 включает в себя уравнение сохранения энергии (уравнение постоянства ротальпии), уравнение изоэнтропийного процесса, уравнение неразрывности, которое позволяет без каких-либо допущений ввести функцию тока [5]:

$$\frac{\partial_z}{\partial r}\left(\frac{W_m}{v}\sin\sigma_2\ \tau\ \sec\delta_z\right)+\frac{\partial_r}{\partial z}\left(\frac{W_l}{v}\sin\sigma_2\ \tau\ \sec\delta_r\right)=0,$$

а также три проекции уравнения количества движения на координатные оси (6).

Выводы

Предложен новый подход к описанию течения в слое переменной толщины на поверхности тока S_2, а именно: на основе геометрических характеристик поверхности S_2 в любой ее точке однозначно указаны два не ортогональных прямолинейных направления, на которые проецируются вектор скорости.

Течение через вращающуюся решетку турбомашины в слое переменной толщины на поверхности тока S_2 рассмотрено как трехмерное относительное установившееся течение идеального газа без каких-либо допущений при определении параметров течения и их производных в окружном направлении.

Список литературы: **1.** *Wu C.-H.* A General theory of three – dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial –, radial –, and mixed – flow types [Text] // NACA Tech. – 1952. – Note 2604. – 93 p. **2.** *Субботович, В. П.* Обтекание трехмерным потоком решетки профилей турбомашины на поверхности вращения [Текст] / В. П. Субботович, А. Ю. Юдин, Ф. К. Там // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ» : сб. науч. трудов. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2008. – № 6. – С. 41–46. **3.** *Субботович, В. П.* Обратная задача теории решеток на осесимметричной поверхности тока [Текст] / В. П. Субботович, А. Ю. Юдин, Ф. К. Там // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ» : сб. науч. трудов. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2009. – № 3. – С. 56–61. – ISSN 2078-774X. 4**.** *Субботович, В. П.* Поток через вращающуюся решетку осевой турбомашины на произвольной поверхности S_1 [Текст] / В. П. Субботович // Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. Вісник НТУ «ХПІ» : зб. наук. праць. – Харків : НТУ «ХПІ», 2013. – № 14(988). – С. 43–48. – ISSN 2078-774X. **5.** *Субботович, В. П.* Уравнение неразрывности для течения в слое переменной толщины на поверхности S_2 [Текст] / В. П. Субботович, А. Ю. Юдин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків .: НТУ «ХПІ», 2014. – № 12(1055). – С. 38–41. – Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2078-774X.

Bibliography (transliterated): 1. Wu, C.-H. "A General theory of three – dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial –, radial –, and mixed – flow types." *NACA Tech*. Note 2604. 1952. Print. **2.** Subotovich, V. P., A. Yu. Yudin and F. K. Tam. "Obtekanie trehmernym potokom reshetki profilej turbomashiny na poverhnosti vrashhenija." *Vestnik NTU "KhPI". Ser.: Jenergeticheskie i teplotehnicheskie processy i oborudovanie.* No. 6. Kharkov: NTU "KhPI", 2008. 41–46. Print. **3.** Subotovich, V. P., A. Yu. Yudin and F. K. Tam. "Obratnaja zadacha teorii reshetok na osesimmetrichnoj poverhnosti toka." *Vestnik NTU "KhPI". Ser.: Jenergeticheskie i teplotehnicheskie processy i oborudovanie.* No. 3. Kharkov : NTU "KhPI", 2009. 56–61. ISSN 2078-774X. Print. **4.** Subotovich, V. P. "Potok cherez vrashhajushhujusja reshetku osevoj turbomashiny na proizvol'noj poverhnosti S_1." *Visnyk NTU "KhPI" Ser.: Energetychni ta teplotehnichni procesy j ustatkuvannja.* No. 14(988). Kharkiv : NTU "KhPI", 2013. 43–48. ISSN 2078-774X. Print. **5.** Subotovich, V. P. and A. Yu. Yudin. "Uravnenie nerazryvnosti dlja techenija v sloe peremennoj tolshhiny na poverhnosti S_2." *Visnyk NTU "KhPI" Ser.: Energetychni ta teplotehnichni procesy j ustatkuvannja.* No. 12(1055). Kharkiv : NTU "KhPI", 2014. 38–41. ISSN 2078-774X. Print.

Поступила (received) 13.01.2015