

В. В. ЕЛИСЕЕВ, А. А. МОСКАЛЕЦ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛАГРАНЖА-РИТЦА-КАНТОРОВИЧА К АНАЛИЗУ КОЛЕБАНИЙ ТУРБИНЫХ ЛОПАТОК

АННОТАЦИЯ Рассматриваются колебания турбинных лопаток как линейно упругих естественно закрученных консольных прямых стержней. Прогибы аппроксимируются по методу Ритца. Коэффициенты аппроксимации являются функциями времени согласно Канторовичу. Для их определения составлены уравнения Лагранжа, решаемые численно средствами системы компьютерной математики (MathCAD). Методика позволяет проводить полный модальный анализ, а также рассчитывать нестационарные свободные и вынужденные колебания. Представлены результаты расчета для лопатки паровой турбины Калужского турбинного завода.

Ключевые слова: турбинные лопатки, естественно-закрученные стержни, линейная теория стержней, частоты и формы колебаний, задача на собственные значения, уравнения Лагранжа, компьютерная математика.

V. ELISEEV, A. MOSKALETS

APPLICATION OF THE LAGRANGE-RITZ-KANTOROVICH METHOD TO THE VIBRATION ANALYSIS OF TURBINE BLADES

ABSTRACT The purpose of this effort is the method of vibration analysis. Object of research is turbine blade. A calculation method based on Lagrange equations is proposed. Blade is assumed to be an elastic rectilinear twisted rod. Linear theory is used which means that translational and angular displacements, as well as the loads, are supposed to be small. Deflections are approximated using the method of Ritz. The coordinate functions correspond to the boundary conditions. The coefficients of approximation are time dependent parameters according to the method of Kantorovich. These coefficients are generalized coordinates. Lagrange equations are solved numerically by means of computer mathematics system (MathCAD). This method enables us to calculate natural frequencies and modes of blade and analyze unsteady free vibrations and forced ones.

Key words: turbine blades, twisted rods, liner theory of rods, natural frequencies and modes, eigenvalue problem, Lagrange equations, computer mathematics.

Введение

Стержни как модели турбинных лопаток используются довольно давно. Вначале лопатки рассчитывали как балки [1]. Использовались также и закрученные стержни [2, 3]. С некоторых пор их стали вытеснять трёхмерные модели и конечно-элементный анализ [4, 5]. Однако сейчас нельзя сказать, что возможности одномерных моделей исчерпаны. Рассмотрение стержневых моделей оправдано, если не проявляются особенности трёхмерного поля напряжений [6–8]. Используя стержни, можно решать задачи, недоступные в трёхмерной постановке [9].

Цель работы

Целью работы является создание инженерной методики расчёта колебаний лопаток как закрученных стержней [10]. Предлагаемая методика основывается на теории стержней и вариационном методе Лагранжа [11] в сочетании с компьютерной математикой [12].

Изложение основного материала

Исследуются свободные и вынужденные колебания лопатки паровой турбины Калужского турбинного завода (КТЗ) [13]. Моделью лопатки является прямой естественно закрученный кон-

сольный стержень несимметричного сечения. У таких стержней боковая поверхность образована винтовым движением контура сечения [14].

Вводится тройка декартовых осей, ось x направлена через центры тяжести сечений вдоль лопатки (считается, что центры тяжести принадлежат одной прямой). Прогиб закрученного стержня всегда имеет две компоненты $u\varphi$, $u\psi$ – функции координаты x и времени t . Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{\sigma}^2 (\mathcal{I}_y^2 + \mathcal{I}_z^2) dx, \quad (1)$$

где σ – погонная масса.

Потенциальную энергию определим с допущением, что осевое перемещение при изгибе $u_x = -u\varphi - z u\psi$:

$$P = \frac{E}{2} \int_0^l \dot{\sigma}^2 dx \int_F u\varphi^2 dF = \frac{E}{2} \int_0^l \left(J_y u\varphi^2 + 2J_{yz} u\varphi u\psi + J_z u\psi^2 \right) dx \quad (2)$$

с моментами инерции

$$J_y = \int_F \dot{\sigma}^2 y^2 dF, \quad J_{yz} = \int_F \dot{\sigma}^2 yz dF, \quad J_z = \int_F \dot{\sigma}^2 z^2 dF.$$

От модели с распределёнными параметрами перейдём к дискретной посредством аппроксимации прогибов

$$\begin{aligned}
 u_y(x, t) &= \sum_{k=1}^N U_{yk}(t) j_k(x) = U_y(t)^T j(x) \\
 u_z(x, t) &= \sum_{k=1}^N U_{zk}(t) j_k(x) = U_z(t)^T j(x)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

(в матричних обозначениях). Функции $U_{y,z}(t)$, характерные для метода Канторовича, играют роль обобщённых координат и подлежат определению из системы уравнений Лагранжа. Координатные функции $j(x)$ задаются нами с соблюдением условий закрепления. Принимаем

$$j_i(x) = x^{1+i}, \quad i = 1, \mathbf{K}, N. \tag{4}$$

Подставив (3) в (1) и (2), получим кинетическую и потенциальную энергию дискретной модели лопатки:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{U}_y^T m U_y + \dot{U}_z^T m U_z), \tag{5}$$

$$P = \frac{1}{2} (U_y^T C_y U_y + 2U_y^T C_{yz} U_z + U_z^T C_z U_z), \tag{6}$$

где $m = \int_0^l j_i j_i^T dx$; $C_{yz} = E \int_0^l j_{yz} f f^T dx$;

$C_y = E \int_0^l j_y f f^T dx$; $C_z = E \int_0^l j_z f f^T dx$ – элементы матриц инерции и жесткости.

Обобщённые силы для уравнений Лагранжа находятся по виртуальной работе:

$$\begin{aligned}
 \int_0^l (f_y du_y + f_z du_z) dx &= Q_y^T dU_y + Q_z^T dU_z, \\
 Q_y &= \int_0^l f_y j dx
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

и аналогично столбец Q_z . Здесь $f_{y,z}$ – компоненты погонной нагрузки.

Сократив матричную запись введением блочных столбцов и матриц:

$$U = \begin{pmatrix} U_y \\ U_z \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_y & C_{yz} \\ C_{yz} & C_z \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}, \tag{9}$$

запишем уравнения Лагранжа

$$M \ddot{U} + CU = Q(t). \tag{10}$$

В случае свободных колебаний ($Q = 0$) рассматривают главные колебания с собственными формами F и частотами l :

$$U(t) = F \sin l t, \quad (C - l^2 M) F = 0. \tag{11}$$

Это обобщённая задача на собственные значения, решаемая в *Mathcad* встроенными процедурами *genvals* и *genvecs* [12].

Выполнены расчёты лопатки КТЗ. При $N = 6$ найдено:

$$l_1 = 1541, \quad l_2 = 3614, \quad l_3 = 7377,$$

$$l_4 = 17622, \quad l_5 = 20577, \quad l_6 = 37316.$$

Каждая собственная форма F содержит множитель L , определяемый условием нормировки $L^2 F^T M F = 1$. Результаты расчёта форм приведены на рис. 1.

При расчёте вынужденных колебаний для нахождения амплитуд использовалась встроенная функция *Isolve*. Параметры аэродинамической нагрузки взяты как в [10]. Результаты расчёта вынужденных колебаний приведены на рис. 2.

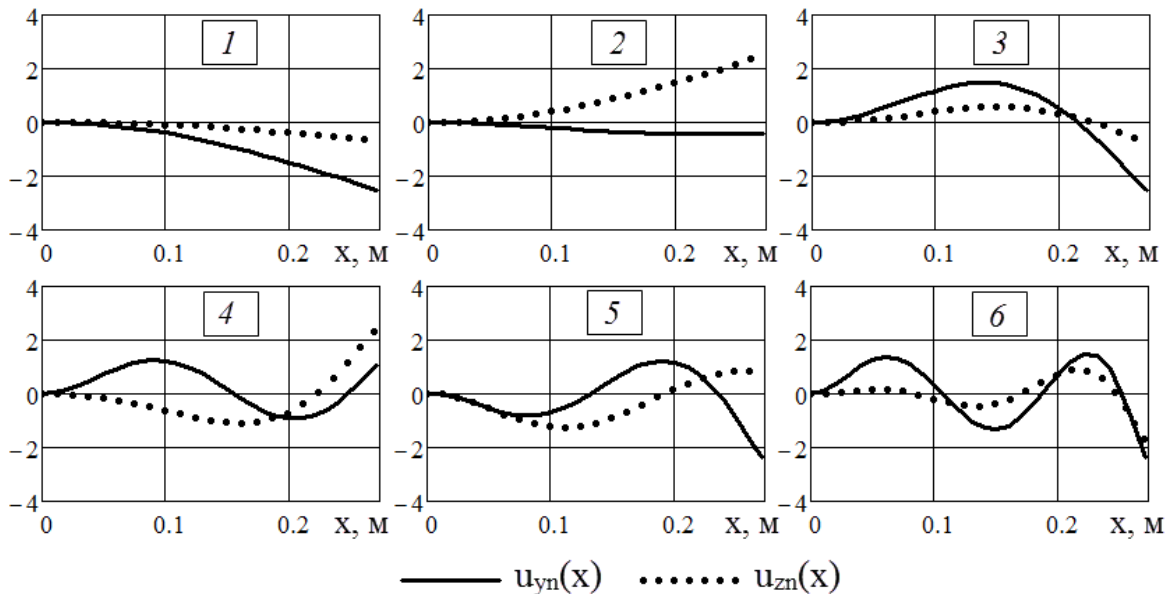


Рис. 1 – Нормированные собственные формы: 1–6 – порядковый номер формы

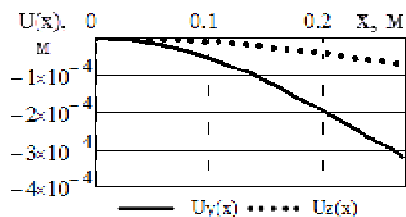


Рис. 2 – Амплитуды вынужденных колебаний

Выводы

Итак, разработана методика расчёта колебаний турбинных лопаток как прямых естественно закрученных консольных стержней с использованием вариационного метода. Основными достоинствами данного метода являются лёгкость осуществления расчётов в системе компьютерной математики и быстрота вычислений. Также следует отметить преимущество метода перед расчётами в пакетах, работающих с трёхмерными моделями, в связи с высокой стоимостью последних.

Список литературы

- 1 Левин, А. В. Прочность и вибрация лопаток и дисков паровых турбин [Текст] / А. В. Левин, К. Н. Боршанский, Е. Д. Консон. – Ленинград : Машиностроение, 1981. – 710 с.
- 2 Биргер, И. А. Динамика авиационных газотурбинных двигателей [Текст] / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр. – М. : Машиностроение, 1981. – 232 с.
- 3 Костюк, А. Г. Динамика и прочность турбомашин [Текст] : учебник для студентов вузов по спец. «Турбиностроение» / А. Г. Костюк. – М. : Машиностроение, 1982. – 264 с.
- 4 Леонов, В. П. Использование метода конечных элементов для моделирования напряжённо-деформированного состояния при создании длинномерных турбинных лопаток из высокопрочных титановых сплавов [Текст] / В. П. Леонов, И. А. Счастливая, Т. Н. Иголкина // Вопросы материаловедения. – 2013. – № 4 (76). – С. 50–60. – ISSN 1994-6716.
- 5 Ильченко, Б. В. Анализ напряжённо-деформированного состояния лопаток турбины К-210-130 при эксплуатационном нагружении [Текст] / Б. В. Ильченко, Р. З. Гиззатуллин, Р. Р. Яруллин // Труды Академэнерго. – 2011. – № 3. – С. 74–81. – ISSN 2070-4755.
- 6 Безязычный, В. Ф. Расчётное определение деформации замковых соединений рабочих лопаток с дисками турбомашин [Текст] / В. Ф. Безязычный, М. А. Ганзен // Справочник. Инженерный журнал с приложением. – 2011. – № 4. – С. 18–22. – ISSN 0203-347X.
- 7 Серветник, А. Н. Моделирование несущей способности диска турбины АГТД [Текст] / А. Н. Серветник // Справочник. Инженерный журнал с приложением. – 2012. – № 10. – С. 44–49. – ISSN 0203-347X.
- 8 Великанова, Н. П. Определение статической прочности рабочих лопаток турбины авиационного ГТД и сравнение различных методов расчёта [Текст] / Н. П. Великанова, А. С. Киселев // Известия выс-

- ших учебных заведений. Авиационная техника. – 2009. – № 3. – С. 75–77. – ISSN 0579-2975.
- 9 Ганиев, Р. Ф. О явлениях самосинхронизации автоколебаний лопаток роторов турбокомпрессоров [Текст] / Р. Ф. Ганиев, О. Б. Балакшин, Б. Г. Кухаренко // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2009. – № 6. – С. 16–23. – ISSN 0235-7119.
- 10 Елисеев, В. В. Колебания турбинных лопаток как естественно закрученных стержней [Текст] / В. В. Елисеев, А. А. Москалец // Современное машиностроение. Наука и образование. – 2014. – № 4. – С. 344–350. – ISSN 2223-0807.
- 11 Елисеев, В. В. Механика упругих тел [Текст] / В. В. Елисеев. – С.-Пб : Изд-во Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, 2003. – 336 с. – ISBN 5-7422-0109-5.
- 12 Кирьянов, Д. В. Mathcad 14 [Текст] / Д. В. Кирьянов. – С.-Петербург : БХВ-Петербург, 2007. – 704 с. – ISBN 978-5-9775-0106-4.
- 13 Жирицкий, Г. С. Конструкция и расчёт на прочность деталей паровых и газовых турбин [Текст] / Г. С. Жирицкий, В. А. Струннин. – М. : Машиностроение, 1968. – 520 с.
- 14 Воробьев, Ю. С. Теория закрученных стержней [Текст] / Ю. С. Воробьев, Б. Ф. Шорр. – Киев : Наукова Думка, 1983. – 188 с.

Bibliography (transliterated)

- 1 Levin, A. V., Borishanskij, K. N. and Konson E. D. (1981), *Prochnost' i vibracija lopatok i diskov parovyh turbin* [Strength and vibration of steam turbine blades and disks], Mashinostroenie [Mechanical engineering], Moscow, Russia.
- 2 Birger, I. A. and Shorr, B. F. (1981), *Dinamika aviacionnyh gazoturbinnnyh dvigatelej* [Dynamics of aircraft gas-turbine engines], Mashinostroenie [Mechanical engineering], Moscow, Russia.
- 3 Kostjuk, A. G. (1982), *Dinamika i prochnost' turbomashin* [Dynamics and strength of turbomachinery], Mashinostroenie [Mechanical engineering], Moscow, Russia.
- 4 Leonov, V. P., Schastlivaja, I. A. and Igolkina, T. N. (2013), ²Ispol'zovanie metoda konechnykh jelementov dlja modelirovanija naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija pri sozdanii dlinnomernykh turbinnnyh lopatok iz vysokoprochnykh titanovyh splavov [Application of finite element method for simulation of stress and strain state at manufacturing of long turbine blades made of high-strength titanium alloys]², *Voprosy materialovedenija* [Problems of materials science], no. 4(76), pp. 50–60, ISSN 1994-6716.
- 5 Il'chenko, B. V., Gizzatullin, R. Z. and Jarullin, R. R. (2011), ²Analiz naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija lopatok turbiny K-210-130 pri jekspluatacionnom nagruzhenii [Stress-strain fields for blades of turbine K-210-130 under operation loading]², *Trudy Akademenergo* [Transactions of Academenergo], no. 3, pp. 74–81, ISSN 2070-4755.
- 6 Bezjazychnyj, V. F. and Ganzen, M. A. (2011), ²Raschetnoe opredelenie deformacii zamkovykh soedinenij rabochih lopatok s diskami turbomashin [Estimation of blade-to-disk attachments deformation in turbomachines]², *Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal* [Handbook. An Engineering journal with appendix], no. 4, pp. 18–22, ISSN 0203-347X.

- 7 **Servetnik, A. N.** (2012), ²Modelirovanie nesushhej sposobnosti diska turbiny AGTD [Simulation of bearing capacity of AGTE turbine disk]², *Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal* [Handbook. An Engineering journal with appendix], no. 10, pp. 44–49, ISSN 0203-347X.
- 8 **Velikanova, N. P. and Kiselev, A. S.** (2009), ²Opre-delenie staticheskoy prochnosti rabochih lopatok turbiny aviacionnogo GTD i sravnenie razlichnyh metodov rascheta [Estimation of static capacity of aircraft GTE turbine rotor blades and intercomparison of computing methods]², *Izv. VUZ. Aviatsionnaya Tekhnika* [Russian aeronautics], no. 3, pp. 75–77, ISSN 0579-2975.
- 9 **Ganiev, R. F., Balakshin, O. B. and Kuharenko, B. G.** (2009), ²O javlenijah samosinhronizacii avtokolebanij lopatok rotorov turbokompressorov [On the occurrence of self-synchronization of turbocompressor rotor blade self-oscillations]², *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, no. 6, pp. 16–23, ISSN 0235-7119.
- 10 **Eliseev, V. V. and Moskalets, A. A.** (2014), ²Kolebani-ja turbinnih lopatok kak estestvenno zakruchennyh sterzhnej [Vibrations of turbine blades as naturally twisted rods]², *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie* [Modern mechanical engineering: science and education], no. 4, pp. 344–350, ISSN 2223-0807.
- 11 **Eliseev, V. V.** (2003), *Mehanika uprugih tel* [Mechanics of elastic bodies], St Petersburg State Polytechnical University, St. Petersburg, Russia. – ISBN 5-7422-0109-5.
- 12 **Kir'janov, D. V.** (2007), *Mathcad 14*, BHV-Peterburg, St. Petersburg, Russia, ISBN 978-5-9775-0106-4.
- 13 **Zhirickij, G. S. and Strunkin, V. A.** (1968), *Konstrukcija i raschet na prochnost' detalej parovyh i gazovyh turbin* [Construction and strength calculation of steam and gas turbine parts], Mashinostroenie [Mechanical engineering], Moscow, Russia.
- 14 **Vorob'ev, Ju. S. and Shorr, B. F.** (1983), *Teoriya zakruchennyh sterzhnej* [Theory of twisted rods], Naukova Dumka [Scientific thought], Kiev, Ukraine.

Сведения об авторах (About authors)

Елисеев Владимир Васильевич – доктор физ.-мат. наук, профессор, Кафедра «Машиноведение и основы конструирования», ИММиТ (Института металлургии, машиностроения и транспорта), Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», г. Санкт-Петербург, Россия, 195251, ул. Политехническая, 29; e-mail: yeliseyev@inbox.ru.

Eliseev Vladimir – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Department Mechanical Engineering and Design, Institute of Metallurgy, Mechanical Engineering and Transport, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia, 195251, Polytechnicheskaya st., 29.

Москалец Артем Анатольевич – магистр, аспирант, инженер-исследователь, Кафедра «Машиноведение и основы конструирования», ИММиТ (Института металлургии, машиностроения и транспорта), Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», г. Санкт-Петербург, Россия, 195251, ул. Политехническая, 29; e-mail: artem.moskalec@gmail.com.

Moskalets Artem – master, post-graduate student, research engineer, Department Mechanical Engineering and Design, Institute of Metallurgy, Mechanical Engineering and Transport, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia, 195251, Polytechnicheskaya st., 29.

Пожалуйста ссылаетесь на эту статью следующим образом:

Елисеев, В. В. Применение метода Лагранжа-Ритца-Канторовича к анализу колебаний турбинных лопаток [Текст] / **В. В. Елисеев, А. А. Москалец** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 8(1180). – С. 149–152. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-774X. – doi: 10.20998/2078-774X.2016.08.21.

Please cite this article as:

Eliseev, V. and Moskalets, A. (2016), ²Application of the Lagrange-Ritz-Kantorovich Method to the Vibration Analysis of Turbine Blades², *Bulletin of NTU "KhPI". Series: Power and heat engineering processes and equipment*, no. 8(1180), pp. 149–152, ISSN 2078-774X, doi: 10.20998/2078-774X.2016.08.21.

Будь ласка посилаетесь на цю статтю наступним чином:

Елисеев, В. В. Використання методу Лагранжа-Рітца-Канторовича до аналізу коливань турбінних лопаток [Текст] / **В. В. Елисеев, А. А. Москалец** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 8(1180). – С. 149–152. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-774X. – doi: 10.20998/2078-774X.2016.08.21.

АНОТАЦІЯ Розглядаються коливання турбінних лопаток як лінійно пружних природно закручених консольних прямих стрижнів. Прогини апроксимуються за методом Рітца. Коефіцієнти апроксимації є функціями часу згідно Канторовичу. Для їх визначення складені рівняння Лагранжа, які вирішуються чисельно засобами системи комп'ютерної математики (MathCAD). Методика дозволяє проводити повний модальний аналіз, а також розраховувати нестационарні вільні і вимушені коливання. Представлені результати розрахунку для лопатки парової турбіни Калужького турбінного заводу.

Ключові слова: турбінні лопатки, природно-закручені стержні, лінійна теорія стрижнів, частоти і форми коливань, завдання на власні значення, рівняння Лагранжа, комп'ютерна математика.

Поступила (received) 25.01.2016