

УДК 621.039.5

doi: 10.20998/2078-774X.2017.09.13

Ю. В. РОМАШОВ, Э. В. ПОВОЛОЦКИЙ**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ОБОЛОЧКИ
СТЕРЖНЕВОГО ТВЭЛА**

АННОТАЦИЯ Рассмотрены математические формулировки задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки твэла. Показано, что более удобными являются формулировки относительно независимых напряжений и перемещения, поскольку они не содержат производных температурных зависимостей характеристик материала оболочки твэла, хотя и содержат больше уравнений, чем формулировка относительно перемещения. Показано, что применение метода конечных разностей является перспективным для решения задач об определении напряженно-деформированного состояния оболочек твэлов.

Ключевые слова: твэл, оболочка, напряженно-деформированное состояние, расчет, метод конечных разностей.

YU. ROMASHOV, E. POVOLOTSKY**USING THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES TO SOLVE THE ROD FUEL ELEMENT
SHELL STRESS-STRAIN BEHAVIOR PROBLEM**

ABSTRACT The stress-strain behavior definition is required to simulate the behavior of the shell of a fuel element and it requires the solution of appropriately formulated problem on the mechanics of strained solid body taking into consideration the geometric shape, fastening conditions, external influence factors and material characteristics. The purpose of this scientific paper was to study the opportunities of the method of finite differences to solve the problem on the definition of the stress-strain behavior of the shells of fuel elements used by nuclear reactors. Stress-strain behavior of the shell is viewed within the bounds of known hypothesis of axisymmetric plane deformation. Consideration is given to different mathematical formulations of the problem on the stress-strain behavior of the shell of fuel element. It has been shown that the most promising formulation is the one with independent unknown stresses and displacements, because it has no derivatives of temperature relationships for material characteristics. The method of finite differences is rather promising for the solution of problems solved to define the stress-strain behavior of the shells of fuel elements. Though the method of finite differences is believed to be well-studied, however the use of this method for differential equations that satisfy the mathematical formulation with independent unknown stresses and displacements requires additional studies and it should be noted that particularly such formulations are of great interest.

Key words: fuel element, stress-strain behavior, computation, and the method of finite differences.

Введение

Анализ напряженно-деформированного состояния оболочки твэла требует решения сформулированной соответствующим образом задачи механики деформированного твердого тела с учетом геометрической формы, условий закрепления, внешних воздействующих факторов, характеристик материала [1, 2]. Для изучения поведения оболочек твэлов в настоящее время применяют, как правило, специализированные программные коды, например *FEMAXI* [3], в которых широко используется метод конечных разностей, поэтому всестороннее изучение этого метода применительно к задачам о напряженно-деформированном состоянии оболочек твэлов представляет огромный интерес.

Цель работы

Математическая формулировка задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочек твэлов может быть представлена в различных формах в зависимости от выбора вида разрешающих уравнений. Целью данной работы является

изучение возможностей метода конечных разностей применительно к решению задач об определении напряженно-деформированного состояния оболочек стержневых твэлов.

Математическая модель напряженно-деформированного состояния оболочки твэла

Оболочка стержневого твэла представляет собой круговой цилиндр с наружным радиусом $r_b \sim 5$ мм и длиной до 4000 мм, нагружаемый внутренним p_a и наружным p_b давлениями и находящийся в поле температуры T . Внутренний радиус оболочки $r_a \sim 4$ мм, так что оболочку твэла следует рассматривать как толстостенный элемент с температурой T_0 в естественно ненагруженном состоянии. Как известно в теории упругости [4–6], напряженно-деформированное состояние тел, у которых один из характерных размеров намного больше двух других, при определенных условиях может рассматриваться в упрощенной постановке в рамках гипотезы о плоской деформации, которая принимается далее при изучении напряженно-деформированного состояния оболочек

© Ю. В. Ромашов, Э. В. Поволоцкий, 2017

твзлов. Положения точек оболочки твзла определяем в цилиндрических координатах и в результате получаем полную систему уравнений с граничными условиями:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (1)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r - \nu'\sigma_\theta}{E'} + \alpha'\Delta T, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta - \nu'\sigma_r}{E'} + \alpha'\Delta T, \quad (3)$$

$$\sigma_r|_{r=r_a} = -p_a, \quad \sigma_r|_{r=r_b} = -p_b, \quad (4)$$

где r – радиальная координата, $r_a \leq r \leq r_b$; u – радиальное перемещение; ε_r и ε_θ – радиальная и окружная деформации; σ_r и σ_θ – радиальные и окружные напряжения; $\Delta T = T - T_0$; E' , ν' и α' – эквивалентные модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного расширения, которые связаны с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и коэффициентом линейного расширения α материала:

$$E' = E/(1 - \nu^2), \quad \nu' = \nu/(1 - \nu), \quad \alpha' = \alpha(1 + \nu).$$

Вместо полной системы уравнений (1), (2) можно рассматривать частные формулировки. Действительно, используя соотношения (3), можем определить напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E'}{1 - \nu'^2} (\varepsilon_r + \nu'\varepsilon_\theta) - \frac{E'\alpha'}{1 - \nu'} \Delta T, \\ \sigma_\theta &= \frac{E'}{1 - \nu'^2} (\varepsilon_\theta + \nu'\varepsilon_r) - \frac{E'\alpha'}{1 - \nu'} \Delta T. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Исключая деформации (1) из выражений (5) и подставляя полученный результат в уравнение (2), и граничные условия (4) в случае, когда E , ν и α – некоторые постоянные, вместо задачи (1)–(4) получаем эквивалентную ей задачу для одного уравнения относительно искомого перемещения:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{E'\alpha'}{1 - \nu'} \frac{dT}{dr}, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} + \nu' \frac{u}{r} &= -\frac{1 - \nu'^2}{E'} p_a + \alpha'(1 + \nu') \Delta T, \quad r = r_a, \\ \frac{du}{dr} + \nu' \frac{u}{r} &= -\frac{1 - \nu'^2}{E'} p_b + \alpha'(1 + \nu') \Delta T, \quad r = r_b. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Формулировка задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочек твзлов в виде (6), (7) представляется наиболее удобной. Вместе с тем, при изучении напряженно-деформированного состояния оболочек твзлов приходится учитывать зависимости характеристик материала от температуры:

$$E = E(T), \quad \nu = \nu(T), \quad \alpha = \alpha(T). \quad (8)$$

Зависимости (8) с учетом осесимметричного температурного поля $T = T(r)$ приводят к сложным функциям координат:

$$E = E(T(r)), \quad \nu = \nu(T(r)), \quad \alpha = \alpha(T(r)). \quad (9)$$

С учетом соотношений (9) после подстановки напряжений (5) в уравнение равновесия (2) конечный результат будет содержать выражения

$$\frac{dE}{dT} \frac{dT}{dr}, \quad \frac{d\nu}{dT} \frac{dT}{dr}, \quad \frac{d\alpha}{dT} \frac{dT}{dr}. \quad (10)$$

Выражения вида (10) существенно затрудняют анализ напряженно-деформированного состояния оболочки твзла. Действительно, данные о температурных зависимостях (8) характеристик материалов представлены в табличной форме, или аналитическими аппроксимациями табличных данных, и получение достоверных данных о производных dE/dT , $d\nu/dT$ и $d\alpha/dT$ содержит определенные трудности. Поэтому весьма важным представляется получить математическую формулировку, в которой не будет содержаться производных dE/dT , $d\nu/dT$ и $d\alpha/dT$.

Математическую формулировку задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки твзла можно представить в виде уравнений (3), в которых при помощи соотношений (1) исключены компоненты тензора деформаций, и уравнения (2):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{E'} \sigma_r + \frac{\nu'}{E'} \sigma_\theta + \frac{du}{dr} &= \alpha' \Delta T, \\ \frac{\nu'}{E'} \sigma_r - \frac{1}{E'} \sigma_\theta + \frac{u}{r} &= \alpha' \Delta T, \\ \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Уравнения (11) следует рассматривать с учетом граничных условий (4). Преимуществом уравнений (11) является то обстоятельство, что они отвечают наиболее общему виду и не содержат при этом выражений вида (10). Уравнения подобного вида показали высокую эффективность при решении задач теории ползучести для исследования состояния элементов оборудования энергетических установок [7, 8].

Метод решения задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки твзла

Для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки твзла можно использовать различные известные численные методы решения краевых задач. Применение методов Галеркина [9] оказалось весьма эффективным при решении некоторых задач о ползучести элементов энергоустановок [7, 8]. В то же время методам Галеркина присущи недостатки, связанные с чувствительностью результатов к погрешностям вычислений, трудностями обоснования выбора пробных функций. Опыт японских специалистов [3] свидетельствует об эффективном применении метода конечных разностей при моделировании поведения оболочек твзлов.

Применение метода конечных разностей представляется наиболее удобным при использовании формулировки задачи вида (6), (7). В этом случае можно получить системы линейных алгебраических уравнений относительно искомых узловых значений неизвестных с ленточными матрицами, причем ширина ленты, естественно, будет определяться числом точек в конечно-разностных аппроксимациях производных. Подобные системы хорошо изучены и представлены в литературе, например, в работе [9]. В то же время применение метода конечных разностей для системы дифференциальных уравнений (11) с граничными условиями (4) в литературе мало изучено в настоящее время, хотя уравнения вида (11) представляют наибольший интерес в силу их универсальности.

Результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки твэла

Рассмотрим решение задачи (6), (7) для следующих исходных данных:

$$r_a = 3,855 \text{ мм}, r_u = 4,55 \text{ мм}, E = 96 \text{ ГПа}, \nu = 0,33, \\ p_a = 10 \text{ МПа}, p_u = 15,7 \text{ МПа}, T = T_0$$

приведены на рис. 1. Расчеты показывают, что с увеличением числа узлов сетки получаемые узловые значения практически совпадают с известным аналитическим решением задачи Ляме о цилиндре, нагруженном внутренним и наружным давлениями.

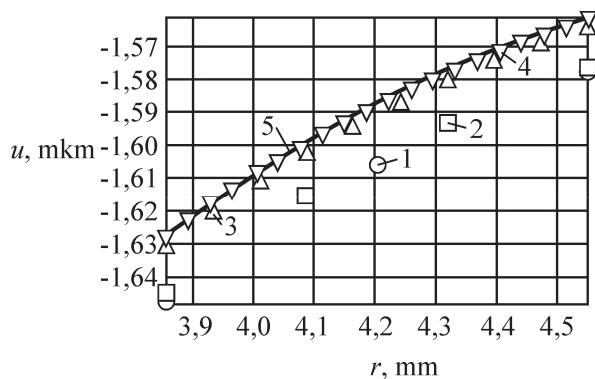


Рис. 1 – Радиальные перемещения в оболочке твэла, отвечающие приближенным решениям с числом узлов сетки $n = 3$ (маркеры 1), $n = 4$ (маркеры 2), $n = 10$ (маркеры 3), $n = 20$ (маркеры 4) и точному решению (кривая 5)

Обсуждение результатов

Полученные результаты (рис. 1), показывают, что даже при относительно небольшом числе узлов сетки удается получать приближенные решения с малой погрешностью. При использовании уравнений (11) погрешность решений ожидается еще меньшей, поскольку при одинаковом числе

узлов сетки имеем больше алгебраических уравнений, чем при использовании уравнения (6).

Применение метода конечных разностей оказывается более простым, чем использование методов Галеркина за счет отсутствия необходимости интегрирования в исследуемой области, а также необходимости в библиотеках пробных функций и за счет ленточной структуры матрицы системы линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений.

Выводы

Рассмотрены математические формулировки задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки твэла. Показано, что более перспективными являются формулировки относительно независимых напряжений и перемещений, поскольку они не содержат производные dE/dT , dv/dT и da/dT температурных зависимостей характеристик материала.

Показано, что применение метода конечных разностей является весьма перспективным для решения задач об определении напряженно-деформированного состояния оболочек твэлов. Рекомендуется в дальнейшем применять именно метод конечных разностей.

Список литературы

- 1 **Imani, M.** Numerical study of fuel-clad mechanical interaction during long-term burnup of WWER1000 / **M. Imani, M. Aghaie, A. Zolfaghari, A. Minuchehr** // Annals of Nuclear Energy. – 2015. – Vol. 80. – P. 267–278. – ISSN 0306-4549. – doi: 10.1016/j.anucene.2015.01.036.
- 2 **Tulkki, V.** Modelling anelastic contribution to nuclear fuel cladding creep and stress relaxation / **V. Tulkki, T. Ikonen** // Journal of Nuclear Materials. – 2015. – Vol. 465. – P. 34–41. – ISSN 0022-3115. – doi: 10.1016/j.jnucmat.2015.04.056.
- 3 **Suzuki, M.** Light water reactor fuel analysis code FEMAXI-V (VER. 1) / **M. Suzuki**. – Japan atomic energy research institute, 2000. – 282 P.
- 4 **Maceri, A.** Theory of Elasticity / **A. Maceri**. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. – 716 p. – ISBN 978-3-642-11392-5.
- 5 **Barber, J. R.** Elasticity / **J. R. Barber**. – Springer Netherlands, 2010. – 534 p. – ISBN 978-90-481-3809-8
- 6 **Anandarajah, A.** Computational Methods in Elasticity and Plasticity / **A. Anandarajah**. – Springer-Verlag New York, 2010. – 653 p. – ISBN 978-1-4419-6379-6.
- 7 **Morachkovskii, O. K.** Solving initial-boundary-value creep problems / **O. K. Morachkovskii, Yu. V. Romashov** // International Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45, No. 10. – P. 1061–1070.
- 8 **Morachkovskii, O. K.** Prediction of the corrosion cracking of structures under the conditions of high-temperature creep / **O. K. Morachkovskii, Yu. V. Romashov** // Materials Science. – 2011 – Vol. 46, No. 5. – P. 613–618. – ISSN 1068-820X. – doi: 10.1007/s11003-011-9331-7.

- 9 **Fletcher, C. A. J.** Computational techniques for fluid dynamics I Fundamental and General Techniques / C. A. J. Fletcher. – Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1988, 1991. – 404 p.
- 4 **Maceri, A.** (2010), *Theory of Elasticity*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-11392-5.
- 5 **Barber, J. R.** (2010), *Elasticity*, Springer, Netherlands, ISBN 978-90-481-3809-8.
- 6 **Anandarajah, A.** (2010), *Computational Methods in Elasticity and Plasticity*, Springer-Verlag, New York, ISBN 978-1-4419-6379-6.
- 7 **Morachkovskii, O. K. and Romashov, Yu. V.** (2009), "Solving initial-boundary-value creep problems", *International Applied Mechanics*, Vol. 45, No. 10, pp. 1061–1070.
- 8 **Morachkovskii, O. K. and Romashov, Yu. V.** (2011), "Prediction of the corrosion cracking of structures under the conditions of high-temperature creep", *Materials Science*, Vol. 46, No. 5, pp. 613–618, ISSN 1068-820X, doi: 10.1007/s11003-011-9331-7.
- 9 **Fletcher, C. A. J.** (1988, 1991), *Computational techniques for fluid dynamics I Fundamental and General Techniques*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

Bibliography (transliterated)

- Imani, M., Aghaie, M., Zolfaghari, A. and Minuchehr, A.** (2015), "Numerical study of fuel-clad mechanical interaction during long-term burnup of WWER1000", *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 80, pp. 267–278, ISSN 0306-4549, doi: 10.1016/j.anucene.2015.01.036.
- 2 **Tulkki, V. and Ikonen, T.** (2015), "Modelling anelastic contribution to nuclear fuel cladding creep and stress relaxation", *Journal of Nuclear Materials*, Vol. 465, pp. 34–41, ISSN 0022-3115, doi: 10.1016/j.jnucmat.2015.04.056.
- 3 **Suzuki, M.** (2000), *Light water reactor fuel analysis code FEMAXI-V (VER. 1)*, Japan atomic energy research institute.

Сведения об авторах (About authors)

Ромашов Юрий Владимирович – доктор технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», профессор кафедры парогенераторостроения, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, профессор кафедры прикладной математики; г. Харьков, Украина; e-mail: yu.v.romashov@gmail.com, ORCID 0000-0001-8376-3510.

Romashov Yurii – Doctor of Engineering Science, Docent, Professor of the Steam Generator Building Department, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", professor of the applied mathematics department, V. N. Karazin Kharkiv National University; Kharkov, Ukraine.

Поволоцкий Элий Викторович – аспирант кафедры парогенераторостроения, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»; г. Харьков, Украина; e-mail: vladislavtish@gmail.com

Povolotskii Elii – Post Graduate Student of the Steam Generator Building Department, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; Kharkov, Ukraine.

Пожалуйста ссылаетесь на эту статью следующим образом:

Ромашов, Ю. В. Применение метода конечных разностей для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки стержневого твэла / **Ю. В. Ромашов, Э. В. Поволоцкий** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 9(1231). – С. 82–85. – Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2078-774X. – doi: 10.20998/2078-774X.2017.09.13.

Please cite this article as:

Romashov, Yu. and Povolotskii, E. (2017), "Using the Method of Finite Differences to Solve the Rod Fuel Element Shell Stress-Strain Behavior Problem", *Bulletin of NTU "KhPI". Series: Power and heat engineering processes and equipment*, No. 9(1231), pp. 82–85, ISSN 2078-774X, doi: 10.20998/2078-774X.2017.09.13.

Будь ласка посилайтесь на цю статтю наступним чином:

Ромашов, Ю. В. Використання методу скінченних різниць для розв'язування задачі про напружено-деформований стан оболонки стержневого твэлу / **Ю. В. Ромашов, Э. В. Поволоцкий** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 9(1231). – С. 82–85. – Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2078-774X. – doi: 10.20998/2078-774X.2017.09.13.

АНОТАЦІЯ Розглянуто математичні формулювання задачі про напружено-деформований стан оболонки твэла. Показано, що більш зручними є формулювання щодо напружень і переміщення, оскільки вони не містять похідні температурних залежностей характеристик матеріалу оболонки твэла, хоча й містять більше рівнянь, ніж формулювання відносно переміщення. Показано, що застосування методу скінченних різниць є перспективним для розв'язування задач щодо визначення напружено-деформованого стану оболонок твэлів.

Ключові слова: твэл, оболонка, напружено-деформований стан, метод скінченних різниць, розрахунковий код.

Поступила (received) 08.02.2017