

**А. И. БРУНЕТКИН, М. В. МАКСИМОВ**

### ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕСИММЕТРИЧНОГО НАГРЕВА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ

**АННОТАЦИЯ** С помощью метода интегральных коэффициентов получено аналитическое выражение, позволяющее приближенно рассчитать температуру внутри бесконечной пластины в процессе ее несимметричного нагрева. Полученное выражение является обобщающим для случая симметричного нагрева бесконечной пластины. Применение интегрального подхода позволило получить выражение, описывающее процесс прогрева в зависимости всего лишь от одной переменной – модифицированного числа гомохронности. Это соответствует свертке полученных результатов без потери информации.

**Ключевые слова:** метод интегральных коэффициентов, модифицированное число гомохронности, несимметричный нагрев пластины.

**A. I. BRUNETKIN, M. V. MAKSYMOV**

### APPROXIMATE ANALYTICAL METHOD FOR THE COMPUTATION OF ASYMMETRIC HEATING OF THE INFINITE PLATE

**ABSTRACT** The fuel of a variable composition can change heat exchange conditions in the structure elements of heat power equipment. This can be manifested by energy accumulation effects and affect the equipment operation. Computational skills that enable the calculation of nonstationary temperature fields in structure elements are of great importance for the operation controllability. First of all, it concerns analytical computation methods. The purpose of this research was to develop the approximate analytical method for the computation of nonstationary temperature fields inside the infinite plate exposed to the asymmetrical heating, in particular at different heat emission coefficients on its sides, but the same ambient temperature. The solution is based on the use of the method of integral coefficients. It provides for the use of a priori information in the form of a selected profile of a change in temperature. The solution is done with the integral coefficient accuracy. Its value is defined by the comparison of obtained data and already available analytical, numerical and experimental data. As a result, we derived a simple analytical expression that enables the computation of a change in the temperature at different points on the plate. The accuracy of obtained data is comparable with the permissible accuracy of engineering computations. The obtained expression allows for the generalization of computation data due to a decrease in the number of independent variables. In the dimensionless form a modified number of homochronicity  $\overline{Ho}$  is used instead of generally used criteria  $Bi$  (Bio) and  $Fo$  (Fourier) number. Due to this fact just one curve (one independent variable) is used instead of the set of curves (two independent variables) to determine a relative temperature at some points.

**Key words:** the method of integral coefficients, modified number of the homochronicity, and the asymmetrical plate heating.

#### Введение

Современное развитие энергетического оборудования характеризуется использованием топлива переменного состава [1]. Изменение состава продуктов сгорания, их теплофизических свойств и количества при неизменной геометрии оборудования ведет к изменению условий теплообмена [2] и проявлению свойств инерционности, связанных с аккумулярованием тепловой энергии в элементах конструкции. Во всех работах, как самых ранних [3], так и более поздних [4], связанных с управлением энергетическим оборудованием, отмечается основополагающее влияние его аккумулярующих свойств на управляемость протекающих теплофизических процессов. В связи с этим разработка методов расчета аккумуляции тепловой энергии в элементах конструкций является важной задачей. Существует большое количество численных методов решения подобных задач. Но для решения задач теории автоматического управления важную роль играют именно аналитические методы.

#### Цель работы

Одним из мест аккумуляции энергии является материал (металл) теплообменных поверхностей. В качестве характеристического параметра величины аккумулярованной энергии используется средняя температура стенки теплообменника, определяемая из условий [3–4]:

– постоянной температуры по толщине стенки;

– на основании граничных условий II рода по передаваемому тепловому потоку от стенки теплообменника к рабочему телу (жидкому теплоносителю).

Поверхность теплообменника со стороны рабочего тела выбирается из-за большой величины коэффициента теплоотдачи, превосходящего коэффициент теплоотдачи со стороны газообразных продуктов сгорания на 2–3 порядка.

Такой подход оправдан при изменении параметров в малом диапазоне (что чаще всего и рассматривается). Но даже в этом случае существует ряд устройств, в которых в качестве

рабочего тела используется газ (охлаждение камер сгорания газовых турбин), пар (пароперегреватели) или меняется положение границы парообразования (прямоточные паровые котлы). В этом случае коэффициенты теплоотдачи со стороны греющих газообразных продуктов сгорания и газо- или парообразного рабочего тела хотя и различаются, но сравнимы по величине и описанный выше подход для определения средней температуры стенки теплообменной поверхности не правомерен.

Анализ работ [5, 6] показывает, что в них рассмотрена наиболее простая задача нагрева бесконечного цилиндра, шара, симметричного нагрева бесконечной пластины и тел, полученных путем пересечения этих геометрических примитивов. Это важно с точки зрения разработки методов решения подобных задач и для ответа на некоторые технологические вопросы, связанные с термообработкой деталей. Но решение задач, связанных с аккумуляцией энергии при теплопередаче, требует рассмотрения термического воздействия, например, на бесконечную пластину, как идеализированного элемента теплообменных поверхностей, при несимметричных условиях на ее поверхностях. Это относится как к коэффициентам теплоотдачи с обеих ее сторон, так и к температурам окружающих сред. Шагом в этом направлении является рассмотрение частного случая несимметричного нагрева пластины при разных на ее поверхностях коэффициентах теплоотдачи, но одинаковых температурах. В [5, стр. 127, п. 9] указано направление, в котором необходимо двигаться для решения этой задачи, но само решение не приводится. В работе [6], вышедшей несколько позже и, зачастую, опирающейся в методах решения на [5], приводится искомое решение [6, стр. 216]. Анализ показывает, что оно, в отличие от решения для случая симметричного нагрева, не соответствует физике описываемого процесса. **Целью** работы является разработка приближенного аналитического метода расчета нестационарного температурного поля внутри бесконечной пластины при несимметричном ее нагреве: различных коэффициентах теплоотдачи по ее сторонам, но одинаковой температуре окружающей среды.

### Изложение основного материала

В [7] предложен приближенный метод расчета температурного поля внутри бесконечной пластины при ее симметричном нагреве. В силу симметричности нагрева профиль температуры симметричный. Поэтому рассматривалась только половина толщины пластины  $\delta$ . Начало координат помещено в центр с направлением оси  $X$  от центра к поверхности пластины. Рассматривались граничные условия III рода как наиболее общие. Начальная температура пластины и окружающей среды  $T_0$ . Температура окружающей среды скач-

ком изменяется до  $T_{срд} > T_0$ . Предложенное решение основано на принятии априори профиля изменения температуры внутри пластины в виде экспоненты с неизвестными изначально и подлежащими определению изменением температурами на поверхности  $\vartheta_n$  и в центре  $\vartheta_c$  пластины

$$\vartheta_x = \vartheta_c + (\vartheta_n - \vartheta_c) \exp(1 - \delta/x), \quad (1)$$

где  $\vartheta_n = T_n - T_0$ ,  $\vartheta_c = T_c - T_0$ .

Принято, что с течением времени нагрева температуры изменяются, но форма профиля (1) остается неизменной. Решение получено для относительных температур, определяемых из соотношений

$$\theta_n = \vartheta_n / \vartheta_{срд}, \quad \theta_c = \vartheta_c / \vartheta_{срд}, \quad (2)$$

где  $\vartheta_{срд} = T_{срд} - T_0$ ,

и в силу этого находятся в диапазоне [0...1]. В результате получено решение, например, для изменения температуры в центре пластины в виде;

$$\theta_c = 1 - \exp(-\overline{Ho}), \quad (3)$$

где  $\overline{Ho} = Fo \frac{Bi}{1 + k \cdot Bi}$ . (4)

Интегральный коэффициент  $k = 0,4$  был определен из сравнения результатов расчетов с результатами аналитических решений. При этом было показано, что ошибка в определении момента окончания прогрева пластины не превышает 3 % во всем рассмотренном диапазоне  $Bi$  (0,005...50).

Использованный в [7] подход позволил получить простое решение (3), которое, к тому же, в отличие от [5, 6] зависит лишь от одной величины –  $\overline{Ho}$ . В результате изменение температуры, например, в центре пластины во времени можно представить всего лишь с помощью одной кривой в отличие от набора кривых в [5, 6].

Такой же подход был использован при решении задачи несимметричного нагрева бесконечной пластины. Пусть в начальный момент температура тела и окружающей среды одинаковые и равны  $T_0$  (рис. 1).

В некоторый момент времени внешняя температура скачком поднимается до величины  $T_{срд}$ . Она одинакова с обеих сторон пластины. Но коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответственно и критерии Био  $Bi_1$  и  $Bi_2$ , разные. Через определенный промежуток времени температура пластины станет равной температуре окружающей среды  $T_{срд}$ . Но в процессе нагрева профиль температуры внутри пластины будет иметь несимметричный вид  $T_{n1} \dots T_c \dots T_{n2}$ . Предварительные исследования показали, что в процессе нагрева хотя положение минимума температуры  $T_c$  в конкретном случае неизвестно, но он всегда перемещается вдоль пря

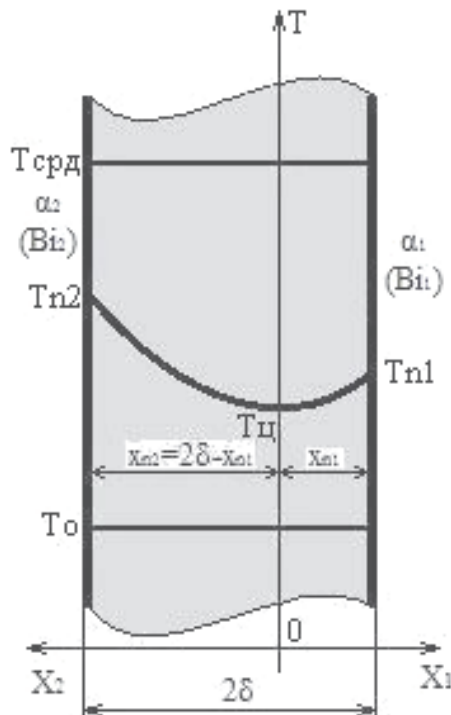


Рис. 1 – Температурное поле внутри бесконечной пластины при ее несимметричном нагреве

мой, параллельной сторонам пластины. Свяжем систему координат с пластиной таким образом, чтобы вертикальная ось отсчета температур проходила через минимум  $T_{ц}$ . Расстояние  $x_{н1}$  от нее до одной из сторон неизвестно и подлежит определению. Расстояние  $x_{н2} = 2\delta - x_{н1}$  от оси до второй стороны пластины определяется исходя из заданной ее толщины  $2\delta$ . Отсчет геометрической координаты ведется в обе стороны по направлению к поверхностям пластины. При таких условиях к каждому из направлений  $X_1$  и  $X_2$  применим метод, изложенный в [7]. Для определения неизвестной величины  $x_{н1}$  вводится еще одно уравнение, построенное на равенстве температуры  $T_{ц}$ , рассчитанной на основе профилей  $T_{n2} \dots T_{ц}$  и  $T_{ц} \dots T_{n1}$ . Выполнив преобразования, подобные [7], могут быть определены величины  $T_{n2}$ ,  $T_{ц}$ ,  $T_{n1}$  и определены температуры в любой точке внутри пластины на основе профилей вида (1). Так, например, в точке минимума температуры  $T_{ц}$  ее относительная (обезразмеренная) величина определяется из соотношения, аналогичного (3)

$$\theta_{ц} = 1 - \exp(-Ho). \quad (5)$$

Здесь

$$\overline{Ho} = Fo \frac{Bi_1 \left( 1 + \frac{Bi_2}{Bi_1} + 2kBi_2 \right)^2}{1 + kBi_2} \times$$

$$\times \frac{1}{1 + \frac{Bi_2}{Bi_1} + 2kBi_2 + kBi_1 + k^2Bi_1Bi_2}. \quad (6)$$

Местоположение этой температуры в относительных долях от толщины пластины определяется выражением

$$\frac{x_{н1}}{2\delta} = \frac{1 + kBi_2}{1 + \frac{Bi_2}{Bi_1} + 2kBi_2}. \quad (7)$$

Выражения для  $Fo$  и  $Bi$  в отличие от (4) определены не для половины толщины пластины  $\delta$ , а для  $2\delta$  – всей толщины. Интегральный коэффициент  $k$  может быть определен из сравнения результатов расчетов с помощью (5) с результатами, например, численных расчетов или взяты из случая симметричного нагрева (4).

### Обсуждение результатов

Выражение для определения обезразмеренной температуры в случаях симметричного (3) и несимметричного (5) нагрева получились идентичными. Выражения для определения входящего в них модифицированного числа гомохронности имеют различный вид. Правильно построенные выражения (5)–(6) должны включать возможность описания случая симметричного нагрева как частного случая. Для проверки этого положим в (6)  $Bi_1 = Bi_2 = \overline{Bi}$ , что соответствует симметричному нагреву. Необходимо учитывать, что в обоих случаях  $Bi$  и  $Fo$  строятся на разных характерных геометрических размерах:  $\delta$  и  $2\delta$  соответственно. Поэтому  $2\overline{Bi} = \overline{Bi}$  и  $Fo = 4\overline{Fo}$ . Здесь  $Bi$  и  $Fo$  – для симметричного нагрева,  $\overline{Bi}$  и  $\overline{Fo}$  – для несимметричного нагрева. Выполнив преобразования над (6) получим выражение, идентичное (4). Следовательно, как и предполагалось, выражения (3), (4) являются частным случаем выражений.

Количественная оценка погрешности вычислений с помощью выражений (5), (6) была получена путем их сравнения с результатами численных расчетов на основе метода контрольных объемов [8]. В частности, на основе этого метода построен пакет *SolidWorks* – программный комплекс для автоматизации работ на этапах конструкторской и технологической подготовки производства. Численный расчет был выполнен для 51 узловой одномерной сетки. С учетом двух узлов на поверхностях пластины получилось 50 интервалов разбиения с шагом 0,02 при относительной обезразмеренной толщине пластины 1. В качестве примера рассмотрим вариант:  $Bi_1 = 1$ ,  $Bi_2 = 10$ .

В первую очередь определим положение минимума температуры. Численный расчет показал, что с точностью шага расчетной сетки (0,02) при большинстве значений  $Fo$  в рамках относи-

тельной координаты он располагается при  $X = 0,74$  (рис. 2). Следует учитывать, что в соответствии с принятой схемой системы координат для аналитических расчетов (рис. 1) это соответствует  $x_{n1}/(2\delta) = 1 - 0,74 = 0,26$ . При выбранных значениях  $Bi_1$  и  $Bi_2$  вычисленное с помощью (7) эта же величина составляет  $x_{n1}/(2\delta) = 0,2632$ , что хорошо совпадает с численными результатами при большинстве значений  $Fo$ . Небольшие расхождения наблюдаются только при малых значениях  $Fo$ . Это может быть объяснено начальным распространением волны тепловой энергии от поверхностей пластины к ее центральным областям.

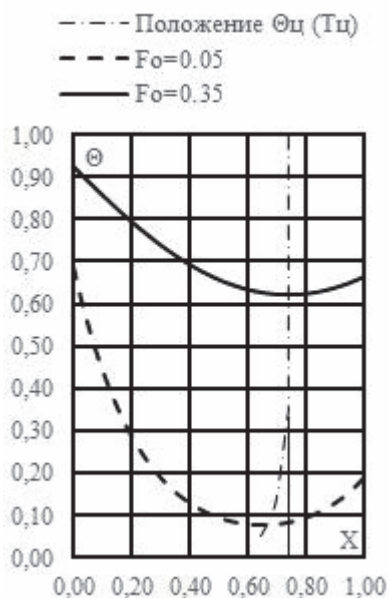


Рис. 2 – Положение минимальной температуры внутри бесконечной пластины при ее несимметричном нагреве

На следующем этапе сравним значения минимальных температур при различных значениях  $Fo$ , полученных в численных расчетах  $\Theta_{\text{ц}}^{\text{числ}}$ , и результаты вычислений с помощью выражений (5)–(6)  $\Theta_{\text{ц}}^{\text{аналит}}$ . Численные расчеты выполнялись с шагом  $\Delta(Fo) = 0,05$ . Результаты сравнения в некоторых точках приведены в табл. 1. В последней строке представлена относительная погрешность  $\epsilon$  аналитических вычислений по отношению к численным расчетам.

Таблица 1 – Сравнение результатов численных и аналитических расчетов минимальной температуры

Fo	0,05	0,30	0,55	0,80	1,05	1,30
$\Theta_{\text{ц}}^{\text{числ}}$	0,084	0,557	0,802	0,912	0,961	0,983
$\Theta_{\text{ц}}^{\text{аналит}}$	0,115	0,519	0,739	0,858	0,923	0,958
$\epsilon$	0,031	0,038	0,063	0,054	0,038	0,024

Погрешность отнесена к диапазону изменения относительной температуры, т.е. к 1. Из таблицы следует, что погрешность вычислений с помощью соотношений (5), (6) во многих точках не превосходит допустимой погрешности инженерных расчетов (5 %) и лишь в некоторых превосходит незначительно. Этим превышением во многих случаях можно пренебречь учитывая точность определения коэффициентов теплоотдачи  $a$ , следовательно, и  $Bi$ . На практике во многих случаях коэффициент  $\alpha$  определяется из критериальных уравнений с погрешностью 15–20 %. На этом фоне погрешность в 6 % можно считать приемлемой.

### Выводы

1 С помощью метода интегральных коэффициентов получено приближенное аналитическое решение нестационарной задачи определения температурного поля внутри бесконечной пластины при несимметричном ее нагреве.

2 Погрешность вычислений не превышает 6 %, что существенно меньше погрешности определения исходных данных (коэффициентов теплоотдачи), используемых при решении.

3 Полученное решение является обобщающим для рассмотренного ранее случая симметричного нагрева бесконечной пластины.

4 Полученное выражение позволяет обобщить результаты расчетов вследствие уменьшения количества независимых переменных. В безразмерном виде вместо критерия  $Bi$  и числа  $Fo$  используется только модифицированное число гомохронности  $\overline{Ho}$ . Вследствие этого при определении относительной температуры в отдельных точках вместо набора кривых (две независимые переменные) используется только одна кривая (одна независимая переменная).

### Список литературы

- 1 Брунеткин, А. И. Идентификация количественного состава неизвестного газообразного горючего и его продуктов сгорания на основе измеренных технологических параметров процесса сжигания топлива / А. И. Брунеткин, М. В. Максимов, А. В. Бондаренко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 12(1055). – С. 131–141. – Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2078-774X.
- 2 Брунеткин, А. И. Визначення діапазону зміни конвективного коефіцієнта тепловіддачі при спалюванні альтернативних видів газоподібного пального / А. И. Брунеткин, А. В. Гусак // Праці Одеського політехнічного університету. – Одеса : ОНПУ, 2015. – Вип. 2(46). – С. 79–84. – ISSN 2223-3814 (online).
- 3 Профос, П. Регулирование паросиловых установок / П. Профос ; Пер. с англ., под ред. Н. И. Давыдова. – Москва : Энергия, 1967. – 368 с.
- 4 Демченко, В. А. Автоматизация и моделирование технологических процессов АЭС и ТЭС : учебное

- пособие / В. А. Демченко. – Одесса : Астропринт, 2001. – 308 с.
- 5 Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер ; Пер. с англ., под ред. А. А. Померанцева. – Москва : Наука, 1964. – 488 с.
  - 6 Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – Москва : Высшая школа, 1967. – 600.
  - 7 Brunetkin, A. I. Integrated approach to solving the fluid dynamics and heat transfer problems / A. I. Brunetkin // Праці Одеського політехнічного університету. – Одеса : ОНПУ, 2014. – Вип. 2(44). – С. 108–115. – ISSN 2076-2429 (print); ISSN 2223-3814 (on line).
  - 8 Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар ; Пер. с англ. под ред. В. Д. Виленского. – Москва : Энергоатомиздат, 1984. – 126 с.
- 2 Brunetkin, A. I. and Gusak, A. V. (2015), "Determining the range of variation of convective heat transfer coefficient by burning alternative types of gaseous fuel", *Collection of the Odessa Polytechnic University*, Vol. 2(46), pp. 79-84, ISSN 2223-3814 (online).
  - 3 Profos, P. (1962), *Regulation of steam power plants*, Springer-Verlag, Berlin.
  - 4 Demchenko, V. A. (2001), *Automation and modeling processes nuclear and thermal power plants*, Astroprint, Odessa.
  - 5 Carslaw, H. S. and Jaeger J. C. *Conduction of heat in solids*, 2nd ed., Oxford, At the Clarendon Press.
  - 6 Lykov, A. V. (1967), *The theory of heat conduction*, Higher School, Moscow, Russia.
  - 7 Brunetkin, A. I. (2014), "Integrated approach to solving the fluid dynamics and heat transfer problems", *Proceedings of the Odessa Polytechnic University*, Vol. 2(44), pp 108–115, ISSN 2076-429 (print); ISSN 2223-3814 (on line).
  - 8 Patankar, S. V. (1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York.

#### Bibliography (transliterated)

- 1 Brunetkin, A. I., Maksimov, M. V. and Bondarenko, A. V. (2014), "The Identification of the Quantitative Composition of Unknown Gaseous Fuel and its Combustion Products using the Measured Technological Parameters of the Fuel Combustion Process", *Bulletin of NTU "KhPI". Series: Power and heat engineering processes and equipment*, No. 12(1055), pp. 131–141, ISSN 2078-774X.

#### Сведения об авторах (About authors)

**Брунеткин Александр Иванович** – кандидат технических наук, доцент, кафедра автоматизации теплоэнергетических процессов, Одесский национальный политехнический университет; Одесса, Украина; e-mail: alexbrun@rambler.ru.

**Brunetkin Alexander Ivanovich** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Associate Professor, Department of automation of heat power processes, Odessa National Polytechnic University; Odessa, Ukraine.

**Максимов Максим Витальевич** – доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой, кафедра автоматизации теплоэнергетических процессов, Одесский национальный политехнический университет; Одесса, Украина; e-mail: prof.maksimov@gmail.com.

**Махымов Максим В.** – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Department of automation of heat power processes, Head of Department, Odessa National Polytechnic University; Odessa, Ukraine.

*Пожалуйста ссылайтесь на эту статью следующим образом:*

**Брунеткин, А. И.** Приближенный аналитический метод расчета несимметричного нагрева бесконечной пластины / А. И. Брунеткин, М. В. Максимов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 9(1231). – С. 71–75. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-774X. – doi: 10.20998/2078-774X.2017.09.11.

*Please cite this article as:*

**Brunetkin, A. I. and Maksymov, M. V.** (2017), "Approximate Analytical Method for the Computation of Asymmetric Heating of the Infinite Plate", *Bulletin of NTU "KhPI". Series: Power and heat engineering processes and equipment*, No. 9(1231), pp. 71–75, ISSN 2078-774X, doi: 10.20998/2078-774X.2017.09.11.

*Будь ласка посилайтесь на цю статтю наступним чином:*

**Брунеткін, О. І.** Наближений аналітичний метод розрахунку несиметричного нагріву нескінченної пластини / О. І. Брунеткін, М. В. Максимов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 9(1231). – С. 71–75. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-774X. – doi: 10.20998/2078-774X.2017.09.11.

**АНОТАЦІЯ** За допомогою методу інтегральних коефіцієнтів отримано аналітичний вираз, що дозволяє наближено розрахувати температуру всередині нескінченної пластини в процесі її несиметричного нагріву. Отриманий вираз є узагальнюючим для випадку симетричного нагріву нескінченної пластини. Застосування інтегрального підходу дозволило отримати вираз, що описує процес прогріву в залежності лише від однієї змінної – модифікованого числа гомохронності. Це відповідає згортці отриманих результатів без втрати інформації.

**Ключові слова:** метод інтегральних коефіцієнтів, модифіковане число гомохронності, несиметричний нагрів пластини.

Поступила (received) 08.02.2017